ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1988
*****

MATHEMATIQUES II

T.A.

Dans l'ensemble du problème les vecteurs sont représentés, soit par une lettre en gras, soit par un couple de lettres surmontées d'une flèche. Le produit vectoriel de *a* par *b* sera représenté par $a \times b$.

E désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3, V l'espace vectoriel associé.
On rappelle, a, b, c, étant trois éléments de V, la formule du double produit vectoriel :
$a \times (b \times c) = (a.c)\,b - (a.b)\,c$
Soit I un intervalle de R. On désigne par D_I l'ensemble des applications de classe C^∞ de I dans V.

Pour tout élément F de D_I on note $W(F) = \left[F,\ F',\ F''\right]$ l'application qui à tout t de I associe le produit mixte :

$$W(F)(t) = \left[F(t),\ F'(t),\ F''(t)\right]$$

On désigne enfin par P_I l'ensemble des éléments F de D_I tels que la fonction W(F) soit à valeurs strictement positives.

PREMIERE PARTIE.

I.1. Soit a, b, c trois éléments de V. Démontrer la formule $(a \times b) \times (a \times c) = \left[a,\ b,\ c\right] a$

I.2. Soit $F \in D_I$ et soit λ une application de classe C^∞ de I dans R.

On désigne par $G = F \times F'$ et λF les éléments de D_I définis par :

$$\forall t \in I,\ G(t) = F(t) \times F'(t),\ \text{et}\ (\lambda F)(t) = \lambda(t)\,F(t)$$

Etablir les formules : (1) $W(\lambda F) = \lambda^3 W(F)$ (2) $G \times G' = W(F)\,F$ (3) $W(G) = (W(F))^2$

I.3.a) Soit $F \in P_I$ et $G = F \times F'$. Démontrer que $G \in P_I$.

b) Inversement soit $G \in P_I$; démontrer qu'il existe un élément F de P_I unique tel que $F \times F' = G$ et établir la formule $F = \dfrac{G \times G'}{\sqrt{W(G)}}$

L'équation $F \times F' = G$, où G est donné dans P_I, a-t-elle des solutions appartenant à D_I mais non à P_I ? Si oui, les donner.
Ainsi l'application S qui à tout élément F de P_I associe $S(F) = F \times F'$ est une bijection de P_I sur lui-même.

I.4. Soit F et G deux éléments de P_I, λ une application de classe C^∞ de I dans $\mathbf{R}_+^*$. Déterminer $S(\lambda F)$ et $S^{-1}(\lambda G)$.

DEUXIEME PARTIE

Dans la suite on utilisera le langage de la cinématique.
Soit O un point fixe de E. Le temps t décrivant l'intervalle I, on considère un élément G de D_I et le point mobile P de E défini, pour tout t de I, par $\overrightarrow{OP}(t) = G(t)$.

On cherche à déterminer le mouvement d'un point M tel que la fonction $\overrightarrow{OM}$ (c'est-à-dire : $t \to \overrightarrow{OM}(t)$) appartienne à D_I et vérifie $\overrightarrow{OM} \times M' = G$, c'est-à-dire :

$$(4)\ \forall t \in I,\ \overrightarrow{OM}(t) \times M'(t) = G(t)$$

Soit R = (O ; i, j, k,) un repère orthonormal direct fixe

TOURNER LA PAGE

II.1. On suppose ici que le point P décrit une courbe située dans un plan contenant O et qu'il existe t_0 tel que :
$G(t_0) \times G'(t_0) \neq 0$

a) Interpréter géométriquement cette dernière condition.
b) Que vaut W (G) ?
c) Existe-t-il des mouvements de M satisfaisant à la condition (4) ?

II.2. On suppose ici que W (G) ne prend jamais la valeur zéro.

a) Etablir que le signe de W (G) est constant.
b) Si W (G) < 0, existe-t-il un mouvement de M satisfaisant à la condition (4) ?
c) Si W(G) > 0, montrer qu'il existe deux mouvements de M vérifiant (4), dont l'un est donné par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{G \times G'}{\sqrt{W(G)}} \qquad \text{(Cf. L3.)}$$

Comment s'en déduit l'autre ?
Dans la suite de cette partie, on suppose que la fonction $\overrightarrow{OP} = G$ *appartient à* P_I *et que* $\overrightarrow{OM} = S^{-1}(G)$

II.3. On note (C) (resp : (C_1)) le cône de sommet O engendré par la droite (OM (t))(resp : par la droite (OP (t))) quand t décrit I. Quelle relation existe-t-il entre la génératrice (OP (t)) de (C_1) et le plan tangent à (C) le long de la génératrice (OM (t)) ? Donner une définition géométrique de (C_1) à partir de (C). On dira que le cône (C_1) est le cône supplémentaire de (C) ; quel est le cône supplémentaire de (C_1) ?

II.4. On suppose le mouvement de P défini dans le repère R par : $\overrightarrow{OP}(t) = i + t\,j + t^2\,k$ où t décrit R.

a) Vérifier que cette fonction appartient à P_R.
b) Montrer que le cône (C_1) engendré par la droite (OP (t)) quand t varie est contenu dans le cône ($\overline{C_1}$) d'équation cartésienne, dans R, $y^2 - x\,z = 0$. Préciser les points de (C_1) n'appartenant pas à ($\overline{C_1}$).
c) Donner dans le repère R les coordonnées cartésiennes de M.
d) Montrer que le cône (C) engendré par la droite (OM (t)) quand t varie est contenu dans un cône ($\overline{C}$) représenté dans R par une équation de la forme $y^2 - mxz = 0$; on déterminera la constante m et on précisera les points de (C) n'appartenant pas à ($\overline{C}$).
e) Nature, symétries, position relative des courbes intersection de ($\overline{C}$) et ($\overline{C_1}$) par le plan d'équation $x + z - 1 = 0$.

(On aura intérêt à se placer dans le repère $R'(O ; \frac{i+k}{\sqrt{2}}, \frac{i-k}{\sqrt{2}}, j)$). Faire une figure précise représentant ces deux courbes.
Faire un croquis perspectif représentant la portion des 2 cônes comprise entre le sommet O et le plan d'équation $x + z - 1 = 0$. Que dire de la position relative des deux cônes ?

II.5. On suppose ici que le mouvement du point P s'effectue dans un plan ne passant pas par O. On désignera par N un vecteur non nul orthogonal à ce plan.
Montrer que la droite passant par M (t) dirigée par le vecteur M" (t) est coplanaire à la droite (O ; N). Quelle réciproque peut-on énoncer ?

II.6. On suppose que le mouvement de P est défini dans le repère R par :
$OP = u + k$ où $u = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$, l'application $t \to \theta(t)$ de I dans R étant de classe C^∞ et à dérivée première strictement positive.

a) Vérifier que la fonction $G = \overrightarrow{OP}$ appartient à P_I.

b) On suppose que la fonction θ vérifie la condition précédente et l'on considère le mouvement de M tel que $\overrightarrow{OM} = S^{-1}(G)$. Déterminer le cône (C) de sommet O contenant la courbe Γ décrite par M. Etablir que la normale à (C) en M (t) rencontre l'axe (O, k) en un point H (t).

II.7. Les hypothèses étant celles de la question précédente, on cherche à déterminer la fonction θ de t pour que l'on ait pour tout $t \in I$ $\|M'(t)\| = 1$. (Le mouvement de M s'effectue donc à la vitesse numérique constante 1).
a) Montrer que M" est orthogonal à M' et que les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et M" sont colinéaires et de même sens.
b) Former l'équation différentielle (5) vérifiée par la fonction θ de t.

c) On pose $h = \sqrt{\frac{d\theta}{dt}}$. Montrer que h et θ vérifient l'équation différentielle $2\left(\frac{dh}{d\theta}\right)^2 + h^2 = 1$ (6)

TOURNER LA PAGE

d) Déterminer les solutions de (6) vérifiant en outre : $2\frac{d^2h}{d\theta^2} + h = 0$ (7)

Déterminer les fonctions θ correspondantes.

e) On considère le mouvement défini pour t décrivant R par :

$$\theta = \sqrt{2}\ \text{Arc tan}\ \frac{t}{\sqrt{2}} \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{-1}{\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)}(u - k)$$

Soit γ la projection sur le plan $(O ; i, j)$ de la courbe décrite par le point M.

– Dresser un tableau des variations de θ et de $\rho = \frac{-1}{\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}}}$ lorsque t décrit R.

– Interpréter géométriquement la fonction $y = \rho \sin\left[\theta - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right]$; déterminer sa limite quand t tend vers $+\infty$

Déterminer les asymptotes de γ.

Montrer qu'en chaque point de γ, la concavité de γ est tournée vers l'origine, en utilisant (II.7.a). Tracer l'allure de γ.

III.1. Soit u un automorphisme de V. Montrer qu'il existe un automorphisme et un seul $\hat{u}$ de V, associé à u tel que l'on ait : $\forall x \in V$, $\forall y \in V$ $u(x) \times u(y) = \hat{u}(x \times y)$

On pourra considérer, en premier, $\hat{u}(i \times j), \hat{u}(j \times k), \hat{u}(k \times i)$.

III.2) Soit U et $\hat{U}$ respectivement les matrices de u et $\hat{u}$ dans la base orthonormale (i, j, k),

a) Etablir, pour tout vecteur v de V, en utilisant le produit mixte [u(j), u(k), $u(u^{-1}(v))$], la relation $\hat{u}(i).v = (\det u)(i.u^{-1}(v))$. (dét u désignant le déterminant de l'automorphisme u).

b) Pour toute matrice carrée M on note ${}^TM$ la transposée de M, dét M le déterminant de M.
Montrer que l'on a : $\hat{U} = (\text{dét } U)\,{}^T(U^{-1})$

Exprimer $\det\hat{u}$ et $\det(\hat{u})$ en fonctionde u et de dét u.

III.3.a) Soit u un automorphisme de V et un point mobile M vérifiant, pour tout t de I :
(8) $\overrightarrow{OM}(t) \times M'(t) = u(\overrightarrow{OM}(t))$ et tel que la fonction $t \to \overrightarrow{OM}(t)$ appartienne à P_I.
Montrer que $W(\overrightarrow{OM}) = \text{dét } u$.

b) Montrer que l'ensemble des points L tels que $u(\overrightarrow{OL}).\overrightarrow{OL} = 0$ est un cône de sommet O, non réduit à son sommet, et contenant la trajectoire de M.
Montrer que u est auto-adjoint en utilisant la relation $\overrightarrow{OM} = S^{-1}[u(\overrightarrow{OM})]$.

III.4) On prend u tel que sa matrice dans la base orthonormale i, j, k, soit $U = \begin{pmatrix} -1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a, b étant des réels fixés non nuls positifs.

a) Montrer que tout point mobile M, vérifiant pour tout t appartenant à un intervalle I la relation (8), reste situé sur la surface définie par le paramétrage

$$(9) \quad \begin{cases} x = az\cos\phi \\ y = bz\sin\phi \end{cases} \qquad (z, \phi) \in R^2$$

b) Soit une courbe Γ située sur ce cône et défini par la donnée d'une fonction $z(\phi)$ de classe infinie.

Condition sur $z(\phi)$ et $\phi'(t)$, pour que le point mobile M défini par $\overrightarrow{OM} = az\cos\phi\, i + bz\sin\phi\, j + z\, k$ vérifie (8).

c) On prend $z = \cos\phi$ et on suppose que $\phi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Déterminer la fonction ϕ pour que le point mobile M vérifie (8) et la condition $\phi(0) = 0$.
Nature de la projection γ de la trajectoire Γ de M sur le plan $(O ; i, j)$. Représenter, par un croquis perspectif, les axes de R, les courbes γ et Γ.

••••• FIN •••••

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail